Χρήσιμες ταυτότητες και σχέσεις:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b+\dots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\dots+b^n$$

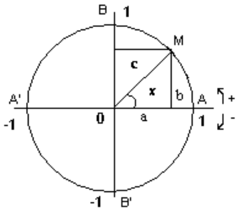
$$(a\pm b)^2 = a^2\pm 2ab+b^2 \quad (a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \quad a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots +a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}),\quad n=1,2,3,\dots$$

$$(1+a)^n\ge 1+na,\quad a>0,\quad n=1,2,3,\dots$$

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι, $x\in\mathbf{R}$



$\sin(x)=\dfrac{b}{c}$, $\cos(x)=\dfrac{a}{c}$, $\tan(x)=\dfrac{b}{a}$, $\cot(x)=\dfrac{a}{b}$

$\sin(x)=-\sin(-x), \quad \cos(x)=\cos(-x)$

$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1, \quad \tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\sin(x\pm y)=\sin(x)\cos(y)\pm\sin(y)\cos(x)$

$\cos(x\pm y)=\cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y)$

$\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan(x)\pm\tan(y)}{1\mp\tan(x)\cdot\tan(y)}$

$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)=\dfrac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$

$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1=\dfrac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$

$\tan(2x)=\dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}, \quad 1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$\sin(x)\pm\sin(y)=2\sin\left(\dfrac{x\pm y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x\mp y}{2}\right)$

$\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$\cos(x)-\cos(y)=-2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$\sin(0)=\cos(\pi/2)=0, \quad \cos(0)=\sin(\pi/2)=1$

$\sin(\pi/6)=\cos(\pi/3)=1/2$,

$\sin(\pi/3)=\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$

$\sin(\pi/4)=\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2$

1 ακτίνιο = $180^o/\pi$ $\quad$ $1^o=\pi/180$ ακτίνια

Σύνολο μιγαδικών $\mathbf{C}=\{z=x+iy \mid x,y\in\mathbf{R}\}$

$$\bar{z}=x-iy \qquad z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Μέτρο $\quad r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ και $r^2=|z|^2=z\cdot\bar{z}$

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

$z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$, όπου θ *πρωτεύον όρισμα.*

Θεώρημα De Moivre

$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$, n ακέραιος

Οι n διακεκριμένες **ρίζες** της εξίσωσης $x^n=z$, $n\in\mathbf{N}$, (n-οστές ρίζες του z):

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\dots n-1$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ \vdots \\ b_{n-1,1}\\ b_{n,1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+\dots+a_{1,n}b_{n,1}\\ a_{21}b_{11}+\dots+a_{2,n}b_{n,1}\\ \vdots\\ a_{m-1,1}b_{11}+\dots+a_{m-1,n}b_{n,1}\\ a_{m1}b_{11}+\dots+a_{mn}b_{n,1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1}\\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i1}\\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{m-1,i}b_{i1}\\ \sum_{i=1}^n a_{m,i}b_{i1}\end{bmatrix}$$

Το γινόμενο **πίνακα A** $m\times n$ **επί πίνακα B** $n\times k$ είναι πίνακας $m\times k$ το (i,j)- στοιχείο προκύπτει από το γινόμενο της i-γραμμής του πίνακα A επί της j-στήλης του πίνακα B: $C=AB\Rightarrow[c_{ij}]=\left[\sum_{p=1}^n a_{ip}b_{pj}\right]$

$A^k=\underbrace{A\cdots A}_{k\ \text{φορές}}$. Αν D διαγώνιος πίνακας D^k διαγώνιος με υψωμένα τα διαγώνια στοιχεία του D στην k.

Ο **ανάστροφος** του $A=[a_{ij}]$ σημειώνεται με $A^T=[a_{ji}]$ (δηλαδή, οι γραμμές γίνονται στήλες και αντίστροφα).

A **συμμετρικός** $A^T=A$.

- $(A^T)^T=A$ $\qquad$ • $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(\lambda A)^T=\lambda A^T$, $\forall\ \lambda\in\mathbf{R}$ $\quad$ • $(AB)^T=B^TA^T$

Ο **αντίστροφος** A^{-1} τετραγ. πίνακα $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

- $(A^{-1})^{-1}=A$ $\qquad$ • $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ $\qquad$ • $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$, $\forall\ k\in\mathbf{Z}$

Ανάπτυγμα Laplace ορίζουσας τετρ.πίνακα $A=[a_{ij}]$ ως προς την i γραμμή ή την j στήλη:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}$$

όπου $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ και M_{ij} η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου ij (ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν αφαιρέσουμε την i γραμμή και την j στήλη από τον A).

Ιδιότητες ορίζουσας του $n\times n$ πίνακα A:

- Αν Α έχει μία γραμμή ή (στήλη) με μηδενικά μόνο στοιχεία τότε det(A)=0.
- Αν Α έχει δύο γραμμές ή (στήλες) ίδιες ή ανάλογες (δηλαδή ένα προς ένα τα στοιχεία της μίας προς τα στοιχεία της άλλης δίνουν ως πηλίκο τον ίδιο αριθμό ή ισοδύναμα η μία είναι πολλαπλάσιο της άλλης) τότε det(A)=0.
- Αν ανταλλάξουμε αμοιβαία δύο διαδοχικές γραμμές (ή διαδοχικές στήλες) ενός πίνακα Α τότε ο πίνακας Β που θα προκύψει έχει ορίζουσα det(B)= -det(A).
- Αν πολλαπλασιάσουμε μία γραμμή (ή στήλη) πίνακα Α με αριθμό κ τότε για τον πίνακα Β που θα προκύψει ισχύει det(B)= κ det(A).
- Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε το πολλαπλάσιο μίας γραμμής (ή μία στήλης) ενός πίνακα Α σε μία άλλη μία γραμμή (ή μία στήλη) του πίνακα Α τότε για τον πίνακα Β που θα προκύψει ισχύει det(B)=det(A).
- $\det(A^T)=\det(A)$, $\det(A^{-1})=1/\det(A)$
- $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$ ($\lambda\in\mathbf{R}$)
- $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ • $\det(A^k)=[\det(A)]^k$
- $\exists\ A^{-1}\Leftrightarrow \det(A)\ne 0$ και $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}adj(A)$

όπου $adj(A)$ ο ανάστροφος του πίνακα αλγεβρικών συμπληρωμάτων ($adj(A)=\left[A_{ij}\right]^T=\left[(-1)^{i+j}M_{ij}\right]^T$).

Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα πίνακα

A $n\times n$ πίνακας, οι **ιδιοτιμές** λ_i του πίνακα είναι οι n ρίζες του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου**

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, $i=1,2,\dots,n$, τα αντίστοιχα **ιδιοδιανύσματα** είναι οι μη μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος $(A-\lambda I)\mathbf{x}=0$.

Κάθε συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται δηλαδή $A=PDP^{-1}$, όπου D είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A και P είναι ο πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

$$A^n=PD^nP^{-1}$$

Καμπύλες

Το *(x,y)* ως προς ορθογώνιο σύστημα *xOy* με κέντρο το *O(0,0)* έχει συντεταγμένες *(X,Y)*= *(x-x*$_0$*,y- y*$_0$*)* ως προς σύστημα με κέντρο *K(x*$_0$*,y*$_0$ *)*. Μία καμπύλη *(L)* με εξίσωση *f(x,y)=0* ως προς το ορθογώνιο σύστημα *xOy* με κέντρο το *O(0,0)* τότε ως προς σύστημα με κέντρο *K(x*$_0$*,y*$_0$*)* θα έχει εξίσωση *f(x*$_0$*+X, y*$_0$*+Y)=0.*

Σημείο *M(x,y)* ως προς ορθογώνιο σύστημα *xOy* με κέντρο το *O(0,0),* ως προς σύστημα με ίδιο κέντρο του οποίου οι άξονες έχουν στραφεί κατά γωνία ϑ *(αριστερόστροφα)* θα έχει συντεταγμένες *M (X,Y)*

$$\begin{cases}X=x\cos(\vartheta)+y\sin(\vartheta)\\ Y=-x\sin(\vartheta)+y\cos(\vartheta)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=X\cos(\vartheta)-Y\sin(\vartheta)\\ y=X\sin(\vartheta)+Y\cos(\vartheta)\end{cases}$$

Ευθεία $y=y_1+\lambda(x-x_1)$, $\lambda=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Παραμετρικές εξισώσεις $\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t\\ y=y_1+(y_2-y_1)t\end{cases}$

Κύκλος με κέντρο το (x_0,y_0)

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Εφαπτομένη στο (x_1,y_1)

$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=r^2$$

Κύκλος που περνά από 3 σημεία

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

Παραβολή με κορυφή (x_0,y_0),

$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ ή $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$

Εφαπτομένη $yy_1=2p(x+x_1)$

Έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a>b,\ b^2=a^2-\gamma^2,\ \varepsilon=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Εφαπτομένη $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$

Παραμετρικές εξ.

$$\begin{cases}x=a\cos(t)\\ y=b\sin(t)\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ y=b\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$$

Υπερβολή $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1,\ \left(\varepsilon=\dfrac{\gamma}{\alpha}\text{ ή }\dfrac{\gamma}{b}\right)$ ή $y=\dfrac{c}{x}$

Εφαπτομένη $\dfrac{xx_1}{a^2}-\dfrac{yy_1}{b^2}=1$

Υπερβ. συν. $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\quad\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές

$\arcsin(\sin(x))=x \quad \arccos(\cos(x))=x$

$\arctan(\tan(x))=x \quad \mathrm{arc}\cot(\cot(x))=x$

Άρτια συνάρτηση $\quad f(-x)=f(x)$

Περιττή Συνάρτηση $\quad f(-x)=-f(x)$

Περιοδική Συνάρτηση $\quad f(x+T)=f(x)$

Παράγωγος συνάρτησης

Η $f:A\to\mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in A$ αν $

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in\mathbf{R}$$

Η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής
- Αν f όχι συνεχής $\Rightarrow$ f όχι παραγωγίσιμη.

Ιδιότητες παραγώγων

- $(cf(x))'=c(f(x))', \quad c\in\mathbf{R}$
- $(f(x)\pm g(x))'=(f(x))'\pm(g(x))'$
- $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},\ g(x)\ne 0$
- Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη f^{-1} είναι παραγωγίσιμη τότε

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'},\quad f'\neq 0 \text{ ή } \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

• Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$

$$\left(f(g(x))\right)' = \frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x))g'(x) = \frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

$c'=0,\ c\in\mathbf{R}$ $\quad (x)'=1 \quad (x^k)'=k\,x^{k-1}, k\in\mathbf{R}$

$(e^x)'=e^x \quad (\ln(x))'=\frac{1}{x} \quad (a^x)'=\ln(a)\cdot a^x$

$(\sin(x))'=\cos(x) \quad (\cos(x))'=-\sin(x)$

$(\tan(x))'=\frac{1}{\cos^2 x} \quad (\log_a(x))=\frac{1}{x\ln(a)}$

$(\cot(x))'=-\frac{1}{\sin^2(x)} \quad (\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos(x))'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan(x))'=\frac{1}{x^2+1}$

Η παράγωγος ως κλίση εφαπτομένης

Η εφαπτομένη ευθεία της $y=f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Η παράγωγος είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής.

Έστω $f:A\to\mathbf{R}$

• Αν $f'(x)>0,\ \forall x\in I\subseteq A$, η f γνησίως αύξουσα .

• Αν $f'(x)<0,\ \forall x\in I\subseteq A$, η f γνησίως φθίνουσα.

• Αν $f'(x_0)=0$, για $x_0\in A$ με $f'(x)>0$, $\forall\ x<x_0$ και $f'(x)<0$, $\forall x>x_0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου. (Ανάλογα για το ελάχιστο).

• Αν $f''(x)>0,\ \forall x\in I\subseteq A$, η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

• Αν $f''(x)<0,\ \forall x\in I\subseteq A$, f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

• Αν $f''(x)>0$, $\forall\ x<x_0$ & $f''(x)<0$, $\forall x>x_0$ (ή αντίστροφα), τότε το x_0 είναι σημείο καμπής.

Αν $f'(x_0)=0$ & $f''(x_0)>0$, τότε x_0 τοπ. ελάχιστο

Αν $f'(x_0)=0$ & $f''(x_0)<0$, τότε x_0 τοπ. μεγίστου.

Γραμμικοποίηση στην περιοχή του c

$$f(x)\approx L(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$$

Διαφορικό

Έστω y=f(x) διαφορίσιμη. Το διαφορικό dx είναι μία ανεξάρτητη μεταβλητή και το διαφορικό dy είναι μία εξαρτημένη (από το x και το dx) : $dy=f'(x)dx$

Αν το dx≠0 τότε: $\frac{διαφορικό\ dy}{διαφορικό\ dx}=f'(x)=\frac{dy}{dx}$

$d(cf)=cdf,\ c\in R \quad d(f\pm g)=df\pm dg$

$d(f\cdot g)=df\cdot g+f\cdot dg \quad d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{df\cdot g-f\cdot dg}{g^2}$

$d(f(g))=f'(g(x))dg=\frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$

Προσέγγιση Μεταβολής $df=f'(c)dx$

Προσέγγιση σχετικής Μετ. $\frac{df}{f(c)}$ **, %** $\frac{df}{f(c)}\times 100$

Σειρές Taylor: Αν η συνάρτηση f και $f^{(1)}, f^{(2)},..., f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και αν η $f^{(n)}$ διαφορίσιμη στο (a,b), τότε για $\xi\in(a,x)$ ισχύει

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ υπόλοιπο πολ. προσέγγισης n-βαθμού. Όταν $a=0$ ανάπτυγμα Maclaurin.

Συνήθη αναπτύγματα Taylor

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

Αόριστο ολοκλήρωμα ή αντιπαράγωγος

$$f(x)=\int g(x)dx \Leftrightarrow \left(f(x)+c\right)'=g(x)$$

Ιδιότητες

$\int\left(c_1f(x)+c_2h(x)\right)dx=c_1\int f(x)dx+c_2\int h(x)dx$

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

(παραγοντική ολοκλήρωση)

$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+c$

Τυπολόγιο

• $\int kdx=kx+c$ • $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c,\quad a\in\mathbf{R}-\{-1\}$

• $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$ • $\int\cos x\,dx=\sin x+c$

• $\int\sin xdx=-\cos x+c$ • $\int e^xdx=e^x+c$

$\int\frac{adx}{x^2+a^2}=arc\tan(\frac{x}{a})+c \quad \int\cosh(x)\,dx=\sinh(x)+c$

$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arc\sin(\frac{x}{a})+c \quad \int\frac{1}{\cos^2(x)}dx=\tan(x)+c$

$\int\frac{1}{\sin^2(x)}dx=-\cot(x)+c$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

• Κάθε συνεχής f είναι ολοκληρώσιμη

• $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \quad \int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$

• $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

• $\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

• $f(x)\le g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

• ΘΜΤ f συνεχής, τότε για κάποιο $\xi\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

Θεμελιώδη θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Αν f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και F αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Αν f συνεχής στο $[a,b]$, τότε

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

(α’) $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

ή $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

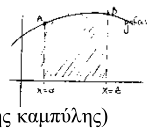
(β’) $\int_a^{b^-}f(x)dx=\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx$ (b ιδιόμορφο σημείο)

$\int_{a^+}^b f(x)dx=\lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)dx$ (a ιδιόμορφο σημείο)

(γ’ είδους) = συνδυασμός α’, β’ είδους

Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων E

$E=\int_a^b f(x)dx,\quad f(x)\ge 0$

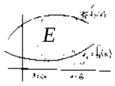


$S=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$ (μήκος επίπεδης καμπύλης)

$E_{ox}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$ (επιφάνεια από περιστροφή)

$V_{ox}=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$ (όγκος από περιστροφή)

$E=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$



$V_{ox}=\pi\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx$

Διανύσματα θέσης

$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$, $\quad |\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2} \quad \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ κατεύθυνση

$P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2) \quad \overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}$

$\mathbf{r_1}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}$, $\mathbf{r_2}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j} \quad a\in\mathbb{R}$

$\mathbf{r_1}\pm\mathbf{r_2}=(x_1+x_2)\mathbf{i}\pm(y_1+y_2)\mathbf{j} \quad a\mathbf{r_1}=(ax_1)\mathbf{i}+(ay_1)\mathbf{j}$

Εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2}=x_1x_2+y_1y_2=|\mathbf{r_1}||\mathbf{r_2}|\cos(\theta)$

$\mathbf{v},\mathbf{u}$ **είναι κάθετα (ορθογώνια)** $\Leftrightarrow\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=0$

Διανυσματική προβολή u **στο** v $\quad proj_v\mathbf{u}=\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$

Αριθμητική συνιστώσα του $\mathbf{u}$ στη κατεύθυνση του $\mathbf{v}$

$$|\mathbf{u}|\cos(\theta)=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$

Κύκλος $\mathbf{r}(t)=a\cos(t)\mathbf{i}+a\sin(t)\mathbf{j},\quad 0\le t\le 2\pi$

Ευθεία $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r_0}+t\mathbf{v},\quad -\infty\le t\le\infty$,

$x(t)=x_0+tv_1,\ \ y(t)=y_0+tv_2,\quad -\infty\le t\le\infty$

$\mathbf{r}'(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}=\frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j}$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\neq 0\mathbf{i}+0\mathbf{j}$ εφαπτόμενο της καμπύλης.

$\mathbf{r}$ **λεία** αν $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ παντού συνεχής και $\neq 0\mathbf{i}+0\mathbf{j}$

$\int_a^b\mathbf{r}(t)dt=\left(\int_a^b x(t)dt\right)\mathbf{i}+\left(\int_a^b y(t)dt\right)\mathbf{j}$

Μήκος τόξου καμπύλης $L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

Σχέση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων:

$x=r\cdot\cos(\theta) \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$

$y=r\cdot\sin(\theta) \quad \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Εμβαδόν χωρίου που σαρώνει η ακτίνα $r=f(\theta)$, $a\le\theta\le b$, είναι $A=\int_a^b\frac{1}{2}r^2d\theta$

Μήκος τόξου καμπύλης $L=\int_a^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$

Διαφορικές εξισώσεις

Χωριζομένων Μεταβλητών:

$M(x)=N(y)\frac{dy}{dx}\Rightarrow\int M(x)dx=\int N(y)dy$

Ομογενής πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)\overset{u=\frac{y}{x}}{\Leftrightarrow}\frac{du}{dx}x+u=F(u)\Leftrightarrow\frac{dx}{x}=\frac{du}{F(u)-u}$$

Γραμμική πρώτης τάξης $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

$y(x)=\frac{1}{p(x)}\int p(x)Q(x)dx \quad p(x)=e^{\int P(x)dx}$

Γραμμικές ομογενείς δ.ε. δευτέρης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$$

χαρακτηριστική εξίσωση $r^2+ar+b=0$

Δύο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους r_1,r_2. γενική λύση $y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

Μία διπλή πραγματική ρίζα r_1 γενική λύση $y(x)=\left(C_1x+C_2\right)e^{r_1x}$

ένα ζεύγος μιγαδικών $r_1=a+bi$, $r_2=a-bi$, γενική λύση $y(x)=e^{ax}\left(C_1\cos(bx)+C_2\sin(bx)\right)$