Ο **ανάστροφος** A^T πίνακας του $A=[a_{ij}]$: $A^T=[a_{ji}]$, (δηλαδή, οι γραμμές γίνονται στήλες και αντίστροφα). $A=[a_{ij}]$ συμμετρικός αν $A^T=A$

Ιδιότητες: • $(A^T)^T=A$ • $(A+B)^T=A^T+B^T$

• $(\lambda A)^T=\lambda A^T$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ • $(AB)^T=B^TA^T$

Ο **αντίστροφος** ενός $n\times n$ πίνακα $A=[a_{ij}]$ συμβολίζεται με A^{-1} και ισχύει $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$.

Ιδιότητες αντίστροφων πινάκων:

• $(A^{-1})^{-1}=A$ • $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

• $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ • $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}$

Ανάπτυγμα Laplace της ορίζουσας τετραγωνικού πίνακα $A=[a_{ij}]$ ως προς την i γραμμή ή την j στήλη:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$$

όπου $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ και M_{ij} η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου ij (ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν αφαιρέσουμε την i γραμμή και την j στήλη από τον *A*).

Ιδιότητες ορίζουσας του $n\times n$ πίνακα A:

• $\det(A^T)=\det(A)$ • $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$

• $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ • $\det(A^k)=\left[\det(A)\right]^k$, $\forall\ k\in\mathbb{R}$

• A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$ $\quad A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}adj(A)$

όπου $adj(A)=\left[A_{ij}\right]^T=\left[(-1)^{i+j}M_{ij}\right]^T$.

Διανυσματικοί χώροι

• Ένα μη κενό υποσύνολο U του πραγματικού διανυσματικού χώρου V είναι υπόχωρος του δ.χ. V αν και μόνο αν $u+v\in W\ \ \forall u,v\in W$, $\lambda u\in W\ \ \forall u\in W$ και $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

• Έστω $v_1,...,v_m\in V$ δ.χ., ένας **γραμμικός συνδυασμός** των $v_1,...,v_m$ είναι ένα στοιχείο του V της μορφής $\lambda_1v_1+...+\lambda_mv_m,\ \lambda_i\in\mathbb{R}$.

• Θα λέμε ότι τα στοιχεία $v_1,...,v_m$ **παράγουν** το χώρο V αν για κάθε $v\in V$ υπάρχουν $\lambda_1,...,\lambda_m\in\mathbb{R}$: $v=\lambda_1v_1+...+\lambda_mv_m$.

Συμβολίζουμε τότε ότι $V=span\{v_1,v_2,...,v_m\}$. Το *span* κάποιων διανυσμάτων ενός δ.χ. V είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

• Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** όταν

$\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\cdots+\lambda_k\mathbf{v}_k=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$

• Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ του δ.χ. V είναι μία **βάση** του V αν και μόνο αν

I. ο δ.χ. V παράγεται από τα $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$

II. τα $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

και τότε η **διάσταση** του V είναι $\dim V=k$.

Η διάσταση του τετριμμένου δ,χ, $V=\{\mathbf{0}\}$ είναι 0.

• Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης δ.χ. και U,W υπόχωροι του V , τότε ισχύει

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)\ .$$

• Για το **ευθύ άθροισμα** των υποχώρων $U,W\subseteq V$ του πεπερασμένης διάστασης δ.χ. V ισχύει $V=U\oplus W\ \Leftrightarrow\ V=U+W$ και $U\cap W=\{0\}$

• Έστω $v_1,...,v_k\in\mathbb{R}^n$ και έστω A ο πίνακας με στήλες αυτά τα διανύσματα Βρίσκω ποιες στήλες της κλιμακωτής μορφής του A περιέχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία. Οι αντίστοιχες στήλες του A αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Έστω $\{v_1,...,v_n\}\subseteq\mathbb{R}^n$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: • Το σύνολο $\{v_1,...,v_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$ • Τα $\{v_1,...,v_n\}$ παράγουν το $\mathbb{R}^n$

• Τα $\{v_1,...,v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω mxn πίνακας A τότε το $N_A=\{x\in\mathbb{R}^n:\ Ax=0\}$ ονομάζεται μηδενοχώρος ή πυρήνας του πίνακα A. Είναι διαν. υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ η διάστασή του ονομάζεται μηδενικότητα του πίνακα. Το $R_A=\{b\in\mathbb{R}^m:\ Ax=b$ για $x\in\mathbb{R}^n\}$ ονομάζεται εικόνα του πίνακα A. Είναι διαν. υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ η διάστασή του ονομάζεται τάξη του πίνακα.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί (απεικονίσεις)

Έστω U,V είναι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι. Μία απεικόνιση $f:U\to V$ ονομάζεται **γραμμική** ή **γραμμικός μετασχηματισμός**, όταν $f(k\mathrm{x}+\lambda\mathrm{y})=kf(\mathrm{x})+\lambda f(\mathrm{y})$, $\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in U$ και $\forall\ k,\lambda\in\mathbb{R}$

Το σύνολο $\ker f=\{\mathbf{x}\in U:\ f(\mathbf{x})=0\}\subseteq U$ ονομάζεται **πυρήνας** της f και είναι υπόχωρος του U .

Το σύνολο $\operatorname{Im} f=\{\mathbf{y}\in V:\ f(\mathbf{x})=\mathbf{y},\ \mathbf{x}\in V\}\subseteq V$ λέγεται **εικόνα** της f και είναι υπόχωρος του V .

Για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ ισχύει $\dim U=\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f$.

Η $f:U\to V$ λέγεται **ένα-προς-ένα** (1-1) αν $\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in U$ με $f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y})\Rightarrow\mathbf{x}=\mathbf{y}$.

Η $f:U\to V$ λέγεται **επί** αν $\operatorname{Im} f=V$.

• Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ και τα διανύσματα $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ είναι βάση του U , τα δε $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m$ είναι βάση του V . Από τις ισότητες

$$\begin{aligned}f(\mathbf{u}_1)&=a_{11}\mathbf{v}_1+a_{21}\mathbf{v}_2+\cdots+a_{m1}\mathbf{v}_m\\f(\mathbf{u}_2)&=a_{12}\mathbf{v}_1+a_{22}\mathbf{v}_2+\cdots+a_{m2}\mathbf{v}_m\\&\ \ \vdots\\f(\mathbf{u}_n)&=a_{1n}\mathbf{v}_1+a_{2n}\mathbf{v}_2+\cdots+a_{mn}\mathbf{v}_m\end{aligned}$$

ορίζεται ο $m\times n$ πίνακας $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$,

που ονομάζεται **πίνακας αναπαράστασης** της f ως προς τις βάσεις $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ και $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m$. Για τον πίνακα A ισχύει $f(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$, για κάθε $\mathbf{x}=\left[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\right]^T\in U$.

• Αν για τους διανυσματικούς χώρους ισχύει $\dim U=\dim V=n$, τότε για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

I. f αντιστρέψιμη (υπάρχει η f^{-1}) II. f είναι 1-1

III. $\ker f=\{\mathbf{0}\}$ IV. f είναι επί

Εσωτερικό γινόμενο

Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$, το **εσωτερικό γινόμενο** $\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύουν οι ιδιότητες: $\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}=\mathrm{y}\cdot\mathrm{x}$, $\forall\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}^n$

$(k\mathrm{x}+\lambda\mathrm{y})\cdot\mathrm{z}=k(\mathrm{x}\cdot\mathrm{z})+\lambda(\mathrm{y}\cdot\mathrm{z}),\ \forall\mathrm{x},\mathrm{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n,\ \forall\ k,\lambda\in\mathbb{R}$

$\mathrm{x}\cdot\mathrm{x}\geq 0$ **και** $\mathrm{x}\cdot\mathrm{x}=0\ \Leftrightarrow\ \mathrm{x}=\mathbf{0}$

• Το μέτρο του διανύσματος x είναι $\|\mathrm{x}\|=\sqrt{\mathrm{x}\cdot\mathrm{x}}$.

•Τα διανύσματα $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}^n$ είναι **κάθετα** αν και μόνο αν $\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}=0$.

Για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ιδιότητες:

I. $\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}=0\Leftrightarrow\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2$

II. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ III. $\|\lambda\mathbf{x}\|\leq|\lambda|\|\mathbf{x}\|$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$

IV. $|\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}|\leq\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|$ (**Cauchy-Schwarz**)

Το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** ενός υπόχωρου $E\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι ο υπόχωρος

$$E^{\perp}=\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n:\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0,\ \ \forall\ \mathbf{x}\in E\right\}.$$

Επιπλέον, $E\oplus E^{\perp}=\mathbb{R}^n$, $(E^{\perp})^{\perp}=E$.

• Μία βάση $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\in\mathbb{R}^n$ ονομάζεται ορθοκανονική αν και μόνο $\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j=0,\ i\neq j$ και $\|\mathbf{u}_i\|=1$

Διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt

Αν $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, τα διανύσματα $\eta_1=\xi_1$ και

$$\eta_j=\xi_j-\frac{\xi_j\cdot\eta_1}{\eta_1\cdot\eta_1}\eta_1-\frac{\xi_j\cdot\eta_2}{\eta_2\cdot\eta_2}\eta_2-\cdots-\frac{\xi_j\cdot\eta_{j-1}}{\eta_{j-1}\cdot\eta_{j-1}}\eta_{j-1}$$

για κάθε $j=2,3,\ldots,k$ είναι κάθετα μεταξύ τους, τα δε διανύσματα $\mathbf{u}_1=\dfrac{\eta_1}{\|\eta_1\|}$, $\mathbf{u}_2=\dfrac{\eta_2}{\|\eta_2\|}$, $\ldots,\mathbf{u}_k=\dfrac{\eta_k}{\|\eta_k\|}$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

• Ο πραγματικός τετραγωνικός πίνακας A με την ιδιότητα $AA^T=A^TA=I$ ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Στον ορθογώνιο πίνακα οι στήλες του (και οι γραμμές του) είναι ορθοκανονική βάση.

Για τους ορθογώνιους πίνακες ισχύουν επιπλέον οι ιδιότητες:

I. $|\det A|=1$ II. $A^{-1}=A^T$ III. $\|A\mathbf{x}\|=\|\mathbf{x}\|$

IV. $A\mathbf{x}\cdot A\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$

V. Γινόμενο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας.

Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα πίνακα

Για έναν $n\times n$ πίνακα A οι **ιδιοτιμές** λ_i του πίνακα είναι οι n ρίζες του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου**

$$p(\lambda)=\det\left(\lambda I-A\right)=\det\begin{bmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

Εναλλακτικά οι ρίζες της εξίσωσης $\det\left(A-\lambda I\right)=0$.

Αν ο A είναι τριγωνικός ή διαγώνιος, τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i , $i=1,2,\ldots,n$, τα αντίστοιχα **ιδιοδιανύσματα** είναι οι μη μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος $\left(A-\lambda I\right)\mathbf{x}=0$.

• Για τις ιδιοτιμές του A ισχύουν:

$\det A=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=(-1)^na_0$ και

$trA=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=-a_{n-1}$, όπου a_0,a_{n-1} οι αντίστοιχοι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$. Αν λ_i ιδιοτιμή και $\mathbf{x}_i$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A , τότε $\lambda_i^k,\mathbf{x}_i$ είναι ιδιοποσά του A^k .

Οι ιδιοτιμές **συμμετρικού πίνακα** είναι αριθμοί πραγματικοί, τα δε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα.

• Ο πίνακας A **διαγωνοποιείται**, όταν $A=PDP^{-1}$, όπου D είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A και P είναι ο πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

• Ο πίνακας A **διαγωνοποιείται όταν η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής ισούται με την γεωμετρική της.**

• $A^n=PD^nP^{-1}$ • Κάθε συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται και ιδιαίτερα υπάρχει ορθογώνιος πίνακας Q , ώστε $A=Qdiag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)Q^T$.

• Αν $p(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τετραγωνικού πίνακα A , τότε από το *θ. των* ***Cayley-Hamilton*** ισχύει

$$p(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=\mathbf{O},$$