Συναρτήσεις

Άρτια $f(-x)=f(x)$ **Περιττή** $f(-x)=-f(x)$

Σχέση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων

$x=r\cdot\cos(\theta)\quad y=r\cdot\sin(\theta)\quad r=\sqrt{x^2+y^2}\quad \theta=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ είναι

$$\left(f(g(x))\right)'=\frac{df(g(x))}{dx}=f'(g(x))g'(x)=\frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

$(c)'=0$, $c\in\mathbf{R}$	$\left(x^k\right)'=k\,x^{k-1}$, $k\in\mathbf{R}$
$(\sin x)'=\cos(x)$	$(\cos x)'=-\sin(x)$
$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(e^x)'=e^x$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$\left(a^x\right)'=\ln(a)\cdot a^x$, $a\neq 1>0$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

Ολοκληρώματα

- $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$
- $\int\dfrac{f'(x)dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+c$ • $\int kdx=kx+c$
- $\int x^a dx=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+c,\quad a\in\mathbf{R}-\{-1\}$ • $\int\dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+c$
- $\int\cos x\,dx=\sin x+c$ • $\int\sin x dx=-\cos x+c$
- $\int e^x dx=e^x+c$ • $\int\dfrac{1}{\sin^2(x)}dx=-\cot(x)+c$

$\int\dfrac{adx}{x^2+a^2}=arc\tan(\dfrac{x}{a})+c\quad \int\cosh(x)\,dx=\sinh(x)+c$

$\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arc\sin(\dfrac{x}{a})+c\quad \int\dfrac{1}{\cos^2(x)}dx=\tan\left(x\right)+c$

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι, $x\in\mathbf{R}$

$\sin(-x)=-\sin(x),\ \cos(x)=\cos(-x),\quad \tan\left(x\right)=\dfrac{\sin\left(x\right)}{\cos\left(x\right)}$

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\sin y\cos x$, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$

$\tan\left(x\pm y\right)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\cdot\tan y}$, $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin 2x=2\sin x\cos x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$, $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\sin x\pm\sin y=2\sin\dfrac{x\pm y}{2}\cos\dfrac{x\mp y}{2}$

$\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

$\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\quad n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$

$\arcsin(\sin(x))=x\quad \arccos(\cos(x))=x\quad \arctan(\tan(x))=x$

$\sin(0)=\cos(\pi/2)=0,\quad \cos(0)=\sin(\pi/2)=1$

$\sin(\pi/6)=\cos(\pi/3)=1/2$,

$\sin(\pi/3)=\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$

$\sin(\pi/4)=\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2$

$\cos(n\pi)=(-1)^n=-1$ αν n=2k+1, 1 αν n=2k

$$\sin(n\frac{\pi}{2})=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n=\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\\ 0, & n=\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\end{cases}$$

$$\cos(n\frac{\pi}{2})=\begin{cases}\mathbf{0} & \mathbf{n=4k+1}\ \acute{\eta}\ \mathbf{n=4k+3}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{n=4k+2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{n=4k+4}\end{cases}$$

Τυπολόγιο Μετασχηματισμών Laplace

$$L\{f(t)\}(s)=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$L\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}\quad L\{1\}=\dfrac{1}{s}\quad L\{e^{at}\}=\dfrac{1}{s-a}$

$L\{\cos(at)\}=\dfrac{s}{s^2+a^2}\quad L\{\sin(at)\}=\dfrac{a}{s^2+a^2}$

$L\{\cosh(at)\}=\dfrac{s}{s^2-a^2}\quad L\{\sinh(at)\}=\dfrac{a}{s^2-a^2}$

$L\{af(t)+bg(t)\}=aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\}$

$L\{e^{at}f(t)\}=L\{f(t)\}\big|_{s=s-a}=F(s)\big|_{s=s-a}=F(s-a)$

$L\{u(t-a)f(t-a)\}=e^{-as}L\{f(t)\}=e^{-as}F(s)$

$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=u(t-a)f(t-a)$,

$L\{\delta(t-\alpha)\}=e^{-as}$, $L^{-1}\{e^{-as}\}=\delta(t-\alpha)$

$L\{f(t)\delta(t-a)\}=f(a)e^{-as}$

$E=\dfrac{Q}{C}+l\dfrac{di}{dt}+R\cdot i\ ,\quad i(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}\ ,\quad Q(t)=\int_0^t i(w)dw$

Ορθογώνιος παλμός: $f(t)=u(t-a)-u(t-b)$

$u(t-a)=\begin{cases}1 & t\geq a\\ 0 & t<a\end{cases}\qquad L\{u(t-a)\}=\dfrac{e^{-as}}{s}$

$L\{f(at)\}=\dfrac{1}{a}F(s)\big|_{s\to\frac{s}{a}}\qquad L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0)$

$L\{f''(t)\}=s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$

$L\{\int_0^t f(u)du\}=\dfrac{L\{f(t)\}}{s}=\dfrac{F(s)}{s}$

$L\{t^\nu f(t)\}=\left(-1\right)^\nu\left(L\{f(t)\}\right)^{(\nu)}=\left(-1\right)^\nu F(s)^{(\nu)}$

$L\{f(t)\}=\dfrac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$ **Για περιοδικές συναρτήσεις**

Συνέλιξη $(f*g)(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)du$

$L\{\left(f*g\right)(t)\}=L\{f(t)\}\cdot L\{g(t)\}=F(s)\cdot G(s)$

$(1+x+x^2+x^3+....)=(1-x)^{-1}=\dfrac{1}{1-x}$

$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}=\dfrac{A}{(s+a)}+\dfrac{B}{(s+b)}+\dfrac{C}{(s+c)}$

$\dfrac{\kappa x^2+\lambda x+\mu}{(x+d)(ax^2+bx+c)}=\dfrac{A}{x+d}+\dfrac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$ όταν $b^2-4ac<0$

$\dfrac{1}{(s+a)^2(s+c)}=\dfrac{A}{(s+a)}+\dfrac{B}{(s+a)^2}+\dfrac{C}{(s+c)}$

Τριγωνομετρική σειρά Fourier:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^\infty[a_n cos(\frac{2\pi nx}{T})+b_n sin(\frac{2\pi nx}{T})]$$

$a_0=\dfrac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)dx\quad a_n=\dfrac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)cos(\dfrac{2\pi nx}{T})dx$

$b_n=\dfrac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)sin(\dfrac{2\pi nx}{T})dx$

Εκθετική σειρά Fourier: $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{2\pi nx}{T}}$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}dx,\ n=0,\pm1,\pm2,....$$

$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi\qquad e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi$

Συναρτήσεις πολλών Μεταβλητών $f(x,y,z)$

$\dfrac{df}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}$ αν x,y,z συν. μόνο του t

$\dfrac{\partial f}{\partial r}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial r}$ αν x,y,z συν. του r,s

Κλίση $\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$

Παράγωγος στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διαν.

$u=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}$ **:** $\left(D_u f\right)\big|_{P_0}=\nabla f\big|_{P_0}\cdot\boldsymbol{u}$

$$df=\left(D_u f\right)\big|_{P_0}ds=\left(\nabla f\big|_{P_0}\cdot\boldsymbol{u}\right)ds$$

Γραμμικοποίηση:

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Ολικό διαφορικό: $df=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy$

Taylor $f(a+h,b+k)\approx f(a,b)+(hf_x+kf_y)\big|_{(a,b)}+\dfrac{1}{2!}(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})\big|_{(a,b)}$

$+\dfrac{1}{3!}(h^3f_{xxx}+3h^2kf_{xxy}+3hk^2f_{xyy}+k^3f_{yyy})\big|_{(a,b)}+\ldots+\dfrac{1}{n!}(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y})^n f\Big|_{(a,b)}$

Ακρότατα $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ Αν στο (a,b)

- $f_{xx}f_{yy}-f^2{}_{xy}>0$ και $f_{xx}<0$ τότε **τοπικό μέγιστο**
- $f_{xx}f_{yy}-f^2{}_{xy}>0$ και $f_{xx}>0$ τότε **τοπικό ελάχιστο**
- $f_{xx}f_{yy}-f^2{}_{xy}<0$ τότε **σαγματικό σημείο**
- $f_{xx}f_{yy}-f^2{}_{xy}=0$ δεν **μπορούμε να αποφανθούμε**

Ευθεία Ελαχίστων Τετραγώνων $y=ax+b$ επιλύω το σύστημα των κανονικών εξισώσεων:

$$a\sum_{i=1}^n x_i^2+b\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n x_i\,y_i\ \text{ και }\ a\sum_{i=1}^n x_i+nb=\sum_{i=1}^n y_i$$

Μέθοδος Πολλαπλασιαστών Lagrange: ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)$ δεδομένου ότι ισχύει $\phi(x,y)=0$

Θεωρώ $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot\phi(x,y)$ και λύνω

$\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\lambda\cdot\dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}=0$

$\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\lambda\cdot\dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}=0$ και $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial\lambda}=\phi(x,y)=0$

Επικαμπύλιο βαθμωτής συνάρτ. επί λείας καμπύλης:

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt$$

Η καμπύλη $\boldsymbol{r}$ είναι **λεία** αν η παράγωγος $v=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ είναι παντού συνεχής και έχει μη μηδενικό μέτρο

διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε περιοχή του χώρου

F(*x,y,z*)=*M*(*x,y,z*)**i**+*N*(*x,y,z*)**j**+*P*(*x,y,z*)**k**

Στροβιλισμός $curlF=\nabla\times F=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix}$

Τελεστής Laplace $\nabla^2 f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Απόκλιση $divF=\nabla\cdot F=\dfrac{\partial M}{\partial x}+\dfrac{\partial N}{\partial y}+\dfrac{\partial P}{\partial z}$

Επικαμπύλιο Διαν. Πεδίου επί λείας καμπύλης:

$$\int F\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{t=a}^{t=b}F\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt=\int_{t=a}^{t=b}\left(M\frac{dx}{dt}+N\frac{dy}{dt}+P\frac{dz}{dt}\right)dt$$

Έργο επί λείας καμπύλης $W=\int F\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{t=a}^{t=b}F\cdot\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt$

f **συνάρτηση δυναμικού** του πεδίου **F** $\Leftrightarrow\boldsymbol{F}=\nabla f$

Το πεδίο **F συντηρητικό**

- αν και μόνο αν το πεδίο είναι αστρόβιλο
- αν και μόνο αν $\oint F\cdot d\boldsymbol{r}=0$
- αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση δυναμικού

Διαφορική Μορφή $\int_A^B Mdx+Ndy+Pdz$ **ακριβής όταν υπάρχει βαθμωτή f τέτοια ώστε** $M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}=\nabla f$ **δηλ. το διαν. πεδίο F**=M**i**+N**j**+P**k είναι συντηρητικό.**

Σε πεδίο ταχύτητας κίνησης ενός ρευστού έχουμε

Ροή $=\int_{t=a}^{t=b}F\cdot\mathbf{T}ds$ **σε κλειστή καμπύλη έχουμε κυκλοφορία κατά μήκος της.**