ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Ο **ανάστροφος** πίνακας του $A=[a_{ij}]$ σημειώνεται με $A^T=[a_{ji}]$, (δηλαδή, οι γραμμές γίνονται στήλες και αντίστροφα).

Ιδιότητες: • $(A^T)^T=A$ • $(A+B)^T=A^T+B^T$

• $(\lambda A)^T=\lambda A^T$, $\forall\, \lambda\in\mathbf{R}$ • $(AB)^T=B^TA^T$

Ο **αντίστροφος** ενός τετραγωνικού πίνακα $A=[a_{ij}]$ συμβολίζεται με A^{-1}.

Ιδιότητες αντίστροφων πινάκων:

• $(A^{-1})^{-1}=A$ • $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

• $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ • $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$, $\forall\, k\in\mathbf{Z}$

Ανάπτυγμα Laplace της ορίζουσας τετραγωνικού πίνακα $A=[a_{ij}]$ ως προς την i γραμμή ή την j στήλη:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$$

όπου $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ και M_{ij} η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου ij (ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν αφαιρέσουμε την i γραμμή και την j στήλη από τον A).

Ιδιότητες ορίζουσας του $n\times n$ πίνακα A:

- $\det(A^T)=\det(A)$
- $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$, $\forall\, \lambda\in\mathbf{R}$
- $\det(AB)=\det(A)\det(B)$
- $\det(A^k)=\left[\det(A)\right]^k$, $\forall\, k\in\mathbf{R}$
- A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$ και

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)$$

όπου $adj(A)$ ο ανάστροφος του πίνακα αλγεβρικών συμπληρωμάτων ($adj(A)=\left[A_{ij}\right]^T=\left[(-1)^{i+j}M_{ij}\right]^T$).

* * * * * * * * * * * * *

• Ένα μη κενό υποσύνολο U του πραγματικού διανυσματικού χώρου V είναι **υπόχωρος** του δ.χ. V αν και μόνο αν $\forall\, k,\lambda\in\mathbf{R}$ και $\forall\, \boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U$ ισχύει $k\boldsymbol{u}_1+\lambda\boldsymbol{u}_2\in U$.

• Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** όταν $\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$ •

Ένα σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}$ του δ.χ. V είναι μία **βάση** του V αν και μόνο αν

I. τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

II. Ο δ.χ. V παράγεται από τα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$

και τότε η **διάσταση** του V είναι $\dim V=k$.

• Το θεώρημα διαστάσεων για τους υποχώρους U,W του δ.χ V είναι:

$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$

• Για το **ευθύ άθροισμα** των υποχώρων $U,W\subseteq V$ του δ.χ. V ισχύει $V=U\oplus W$ $\Leftrightarrow$

$V=U+W$ και $U\cap W=\{\mathbf{0}\}$ $\Leftrightarrow$

$V=U+W$ και $\dim V=\dim U+\dim W$

* * * * * * * * * * * * *

Εσωτερικό γινόμενο

Για κάθε $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, το **εσωτερικό γινόμενο** $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύουν οι ιδιότητες

I. $(k\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})\circ\boldsymbol{z}=k(\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{z})+\lambda(\boldsymbol{y}\circ\boldsymbol{z})$,

$\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$, $\quad\forall\, k,\lambda\in\mathbf{R}$

II. $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\circ\boldsymbol{x}$, $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$

III. $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}\geq 0$ **και** $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

• Το **μέτρο** του διανύσματος $\boldsymbol{x}$ ορίζεται από τον τύπο $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}}$.

• Η **γωνία** $\omega\in[0,\pi]$ **δύο διανυσμάτων** ορίζεται από τον τύπο $\cos\omega=\dfrac{\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}$.

Τα διανύσματα $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ είναι **κάθετα** αν και μόνο αν $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=0$.

Για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ ισχύουν οι ιδιότητες:

I. $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=0\Leftrightarrow\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$

II. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$

III. $\|\lambda\boldsymbol{x}\|\leq|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$, $\forall\, \lambda\in\mathbf{R}$

IV. $|\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}|\leq\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$ **(Cauchy-Schwarz)**

• **Προβολή** $\boldsymbol{p}$ διανύσματος $\boldsymbol{x}$ στη διεύθυνση του $\boldsymbol{y}$ είναι $\boldsymbol{p}=\dfrac{\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}\boldsymbol{y}$.

• Το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** ενός υπόχωρου $E\subseteq\mathbf{R}^n$ είναι ο υπόχωρος $E^{\perp}=\left\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n:\ \boldsymbol{x}\,\mathrm{o}\,\boldsymbol{y}=0,\ \forall\, \boldsymbol{x}\in E\right\}$. Επιπλέον, $E\oplus E^{\perp}=\mathbf{R}^n$, $(E^{\perp})^{\perp}=E$.

• Μία βάση $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_k\in\mathbf{R}^n$ ονομάζεται ορθοκανονική αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι ανά δύο κάθετα και μοναδιαία (δηλ. $\boldsymbol{u}_i\circ\boldsymbol{u}_j=0$, $\|\boldsymbol{u}_i\|=1$)

• Αν $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ είναι βάση του $\mathbf{R}^n$, τα διανύσματα

$\eta_1=\xi_1$ και

$\eta_j=\xi_j-\dfrac{\xi_j\circ\eta_1}{\eta_1\circ\eta_1}\eta_1-\dfrac{\xi_j\circ\eta_2}{\eta_2\circ\eta_2}\eta_2-\cdots-\dfrac{\xi_j\circ\eta_{j-1}}{\eta_{j-1}\circ\eta_{j-1}}\eta_{j-1}$ για κάθε $j=2,3,\ldots,k$

είναι κάθετα μεταξύ τους, τα δε διανύσματα

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}\ ,\quad \boldsymbol{u}_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}\ ,\quad \ldots,\boldsymbol{u}_k=\frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^n$.

• Ο πραγματικός τετραγωνικός πίνακας A με την ιδιότητα $AA^T=A^TA=I$ ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Στον ορθογώνιο πίνακα οι στήλες του (και οι γραμμές του) είναι ορθοκανονική βάση.

Για τους ορθογώνιους πίνακες ισχύουν επιπλέον οι ιδιότητες:

I. $|\det A|=1$

II. $A^{-1}=A^T$

III. $\|A\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$

IV. $A\boldsymbol{x}\circ A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}$

V. Γινόμενο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας.

* * * * * * * * * * * * *

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Έστω U,V είναι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι. Μία απεικόνιση $f:U\to V$ ονομάζεται **γραμμική** ή **γραμμικός μετασχηματισμός**, όταν

$f(k\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})=kf(\boldsymbol{x})+\lambda f(\boldsymbol{y})$, $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$ και $\forall\, k,\lambda\in\mathbf{R}$.

Το σύνολο $\ker f=\{\boldsymbol{x}\in U:\ f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}\}\subseteq U$ ονομάζεται **πυρήνας** της f και είναι υπόχωρος του U .

Το σύνολο $\operatorname{Im} f=\{\boldsymbol{y}\in V:\ f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}\in V\}\subseteq V$ λέγεται **εικόνα** της f και είναι υπόχωρος του V .

Για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ ισχύει $\dim U=\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f$.

Η $f:U\to V$ λέγεται **ένα-προς-ένα** (1-1) αν $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$ με $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})\Rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

Η $f:U\to V$ λέγεται **επί** αν $\operatorname{Im} f=V$.

• Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ και τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ είναι βάση του U , τα δε $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ είναι βάση του V . Από τις ισότητες

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}_1)&=a_{11}\boldsymbol{v}_1+a_{21}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{v}_m\\ f(\boldsymbol{u}_2)&=a_{12}\boldsymbol{v}_1+a_{22}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m2}\boldsymbol{v}_m\\ &\vdots\\ f(\boldsymbol{u}_n)&=a_{1n}\boldsymbol{v}_1+a_{2n}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{v}_m\end{aligned}$$

ορίζεται ο $m\times n$ πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},$$

που ονομάζεται **πίνακας αναπαράστασης** της f ως προς τις συγκεκριμένες βάσεις. Για τον πίνακα A ισχύει $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$, για κάθε $\boldsymbol{x}=\left[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\right]^T\in U$.

• Αν για τους διανυσματικούς χώρους ισχύει $\dim U=\dim V=n$, τότε για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

I. f αντιστρέψιμη (υπάρχει η f^{-1})

II. f είναι 1-1

III. $\ker f=\{\mathbf{0}\}$

IV. f είναι επί

* * * * * * * * * * * * *

Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα πίνακα

Για έναν $n\times n$ πίνακα A οι **ιδιοτιμές** λ_i του πίνακα είναι οι n ρίζες του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου**

$$p(\lambda)=\det\left(A-\lambda I\right)=\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=(-1)^n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

Αν ο A είναι τριγωνικός ή διαγώνιος, τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i , $i=1,2,\ldots,n$, τα αντί-στοιχα **ιδιοδιανύσματα** είναι οι λύσεις $\boldsymbol{x}=\left[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\right]^T$ του ομογενούς συστήματος $\left(A-\lambda I\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_i)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda_i)x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda_i)x_n&=0\end{aligned}$$

• Για τις ιδιοτιμές του A ισχύουν:

$\det A=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=(-1)^na_0$

και $trA=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=-a_{n-1}$,

όπου a_0,a_{n-1} οι αντίστοιχοι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$.

Αν λ_i ιδιοτιμή και $\boldsymbol{x}_i$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A, τότε λ_i^k, $\boldsymbol{x}_i$ είναι ιδιοποσά του A^k .

Οι ιδιοτιμές συμμετρικού πίνακα είναι αριθμοί πραγματικοί, τα δε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα.

• Ο πίνακας A **διαγωνοποιείται**, όταν $A=PDP^{-1}$, όπου D είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A και P είναι ο πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

• Αν $f(\lambda)$ είναι πολυώνυμο, τότε

$f(A)=P\,f(D)\,P^{-1}=P\,diag\left(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\ldots,f(\lambda_n)\right)P^{-1}$ •

Κάθε συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται και ιδιαίτερα υπάρχει ορθογώνιος πίνακας Q , ώστε

$$A=Qdiag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)Q^T .$$

• Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ισχύει

$$p(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=\mathbf{O} .$$

Αν $\upsilon(\lambda)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(\lambda)$ δια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$, τότε $f(A)=\upsilon(A)$.

Τετραγωνικές μορφές

Το πολυώνυμο των πραγματικών μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ της μορφής $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, όπου $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$ και A είναι συμμετρικός πίνακας, ονομάζεται **τετραγωνική μορφή**. Αν $A = QDQ^T$, τότε η $F(\mathbf{x})$ μετασχηματίζεται στη **διαγώνια μορφή**

$$F(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

όπου $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{bmatrix}^T = Q^T \mathbf{x}$.

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0 \ (< 0)$ η F λέγεται **θετικά** (**αρνητικά**) **ορισμένη**, αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$ (≤ 0) λέγεται **θετικά** (**αρνητικά**) **ημιορισμένη**, ενώ, σε κάθε άλλο συνδυασμό προσήμων των λ_i ονομάζεται **αόριστη**.

* * * * * * * * * * * * *

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A

$$\begin{aligned} f : A &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto y \end{aligned} \quad \text{ή} \quad y = f(x), \ x \in A,$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης f

$C_f = \{ M(x, y) : y = f(x) \}$

- Συνάρτηση f **γνησίως αύξουσα** στο A
$f(x_1) < f(x_2)$, $\forall \ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.
- Συνάρτηση f **γνησίως φθίνουσα** στο A
$f(x_1) > f(x_2)$, $\forall \ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.
- **Άνω φραγμένη** συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$

Υπάρχει αριθμός s (άνω φράγμα της f) με την ιδιότητα: $f(x) \leq s$, $\forall \ x \in A$.

(Ανάλογα ορίζεται η κάτω φραγμένη).

Φραγμένη λέγεται η συνάρτηση αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

- 1-1 συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$: $\forall \ x_1, x_2 \in A$ αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

Σύνθεση της $f : A \to \mathbf{R}$ με την $g : B \to \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$ για τα οποία $f(x) \in B$.

Αντίστροφη συνάρτηση μιας 1-1 συνάρτησης f είναι η $f^{-1} : f(A) \to A$, που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ στο μοναδικό x, για το οποίο ισχύει $y = f(x)$, δηλ. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

✓ *Όριο συνάρτησης στο* x_0 *- Πλευρικά όρια*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \ \Leftrightarrow \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

✓ *Κριτήριο παρεμβολής*:

Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και στην περίπτωση που $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

✓ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

✓ *Συνέχεια*

Η συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

* * * * * * * * * * * * *

Παράγωγος συνάρτησης

Η συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbf{R}$$

Η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής
- Αν f δεν είναι συνεχής $\Rightarrow$ f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Ιδιότητες παραγώγων

- $\left(cf(x) \right)' = c \left(f(x) \right)'$, $c \in \mathbf{R}$
- $\left(f(x) \pm g(x) \right)' = \left(f(x) \right)' \pm \left(g(x) \right)'$
- $\left(f(x) \cdot g(x) \right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)' = \dfrac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$
- Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη f^{-1} είναι παραγωγίσιμη τότε

$$\left(f^{-1} \right)' = \frac{1}{f'}, \quad f' \neq 0$$

- Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ είναι

$$\left(f(g(x)) \right)' = \frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x)) g'(x) = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

$f(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^k$, $k \in \mathbf{R}$	$f'(x) = k \, x^{k-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \sin^{-1} x = arc \sin x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = \tan^{-1} x = arc \tan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Κανόνας l' Hospital

Πρώτη διατύπωση: Αν $f(a) = g(a) = 0$ και $f'(a), g'(a)$ υπάρχουν και $g'(a) \neq 0$, τότε

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Δεύτερη διατύπωση : Αν $f(x_0) = g(x_0) = 0$, με $f(x), g(x)$ διαφορίσιμες στο (a, b), και $g'(x) \neq 0$, εκτός πιθανώς του $x_0 \in (a, b)$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ο κανόνας ξαναχρησιμοποιείται αν ισχύουν οι ίδιες συνθήκες και για τις παραγώγους των $f(x), g(x)$.

- Στις απροσδιόριστες $\dfrac{\pm\infty}{\mp\infty}$, $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$ γίνονται οι μετατροπές

$$\infty / \infty \to \frac{f}{g} = \frac{1/g}{1/f} \qquad 0 \times (\pm\infty) \to fg = \frac{f}{1/g}$$

$$\infty - \infty \to f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/fg}$$

- Τις απροσδιόριστες 0^0, $+\infty^0$, 1^∞ τις μετατρέπουμε με βάση τη σχέση $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} (g(x) \ln f(x))}$ ($f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$)

Εφαρμογές των παραγώγων στο σχεδιασμό της C_f της $f : A \to \mathbf{R}$

✓ *Από πρώτη παράγωγο*

- Αν $f'(x) > 0$, $\forall x \in I \subseteq A$, τότε η f γνησίως αύξουσα.
- Αν $f'(x) < 0$, $\forall x \in I \subseteq A$, τότε η f γνησίως φθίνουσα.
- Αν $f'(x_0) = 0$, για κάποιο $x_0 \in A$ με $f'(x) > 0$, $\forall \ x < x_0$ και $f'(x) < 0$, $\forall x > x_0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου. (Ανάλογα για το ελάχιστο).

✓ *Από δεύτερη παράγωγο*

- Αν $f''(x) > 0$, $\forall x \in I \subseteq A$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.
- Αν $f''(x) < 0$, $\forall x \in I \subseteq A$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάνω.
- Αν $f''(x) > 0$, $\forall \ x < x_0$ & $f''(x) < 0$, $\forall x > x_0$ (ή αντίστροφα), τότε το x_0 είναι σημείο καμπής.
- **α)** Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

  β) Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Ασύμπτωτες

- *Κάθετη* ασύμπτωτη η ευθεία $x = a \in \mathbf{R}$, αν

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

- *Οριζόντια* ασύμπτωτη η ευθεία $y = b \in \mathbf{R}$, αν

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

- *Πλάγια ασύμπτωτη* της C_f στο $\pm\infty$ η ευθεία $y = ax + b$, αν $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - ax - b \right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}$ και $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbf{R}$ *

Σημαντικά θεωρήματα

Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbf{R}$.

✓ *Bolzano:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

✓ *Ενδιάμεσης τιμής:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) \neq f(b)$, τότε, για κάθε αριθμό ρ μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \rho$.

✓ *Μέγιστης - ελάχιστης τιμής:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Επιπλέον υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ έτσι ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall x \in [a, b]$.

✓ *Θεώρημα μέσης τιμής* (ΘΜΤ)*:* Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

✓ *Rolle:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b), και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = 0$.

✓ Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b), και $f'(x) = 0$, $\forall \ x \in (a, b)$, τότε $f(x) = c$.

✓ *Cauchy:* Αν οι $f(x), g(x)$ είναι ορισμένες, συνεχείς στο $[a, b]$, είναι διαφορίσιμες στο (a, b) και $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

✓ *Darboux:* Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με $f'(a) \geq f'(b)$. Αν $c \in \mathbf{R}$ με $f'(b) < c < f'(a)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = c$.

Εφαρμογή του θεωρήματος για την προσέγγιση ρίζας: Έστω ότι η εξίσωση $x = f(x)$ έχει ρίζα a, με f να είναι παραγωγίσιμη στο $\left[a - h, a + h \right]$, να ισχύει $\left| f'(x) \right| < m < 1$, $\forall x \in \left[a - h, a + h \right]$ και έστω αυθαίρετο $x_0 \in \left[a - h, a + h \right]$. Τότε η ακολουθία

$x_n = f(x_{n-1}),\ n=1,2,...$, συγκλίνει μονότονα στη ρίζα a.

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- Κάθε συνεχής f είναι ολοκληρώσιμη
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
- ΘΜΤ f συνεχής, τότε για κάποιο $\xi\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Αόριστο ολοκλήρωμα ή αντιπαράγωγος

$f(x)=\int g(x)dx \Leftrightarrow \big(f(x)+c\big)' = g(x)$

Ιδιότητες

$\int \big(c_1 f(x)+c_2 h(x)\big)dx = c_1\int f(x)dx + c_2\int h(x)dx$

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

(παραγοντική ολοκλήρωση)

$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$

Τυπολόγιο

- $\int kdx = kx + c$
- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\quad a\in\mathbf{R}-\{-1\}$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{adx}{x^2+a^2} = \tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c = arc\tan(\frac{x}{a}) + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c = arc\sin(\frac{x}{a}) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$

Θεμελιώδη θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

I. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και F είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

II. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τότε

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

* * * * * * * * * * * * *

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

(α' είδους) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

ή $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

(β' είδους) $\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_a^{b-e} f(x)dx$

(b ιδιόμορφο σημείο)

$\int_{a^+}^b f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_{a+e}^b f(x)dx$

(a ιδιόμορφο σημείο)

(γ' είδους) = συνδυασμός α', β' είδους

$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_{a+e}^c f(x)dx + \lim_{e\to0^+}\int_c^{b-e} f(x)dx$

με $a<c<b$ (a,b ιδιόμορφα σημεία)

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$

$\int_{-\infty}^{a^-} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^c f(x)dx + \lim_{e\to0^+}\int_c^{a-e} f(x)dx$

(a ιδιόμορφο σημείο)

$\int_{a^+}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_{a+e}^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$ (a ιδιόμορφο σημείο)

(εσωτερικό ιδιόμορφο σημείο $c\in[a,b]$ **- πρωτεύουσα τιμή του Cauchy)**

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_a^{c-e} f(x)dx + \lim_{e\to0^+}\int_{c+e}^b f(x)dx$

(c ιδιόμορφο σημείο)

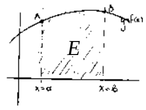
$\int_{a^+}^b f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_{a+e}^b f(x)dx$ (a ιδιόμορφο σημείο)

Ο **μετασχηματισμός Laplace** μίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ είναι

$L\{f(t)\}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$, για κάθε τιμή του x για την οποία το παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

* * * * * * * * * * * * *

Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων



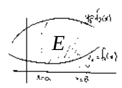
$E = \int_a^b f(x)dx,\ f(x)\ge 0$

$S = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ (μήκος επίπεδης καμπύλης)

$E_{ox} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ (επιφάνεια από περιστροφή)

$V_{ox} = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$ (όγκος από περιστροφή)

$E = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$



$V_{ox} = \pi\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]dx$

* * * * * * * * * * * * *

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ-ΣΕΙΡΕΣ

- **Ακολουθία** είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών. Συμβολίζεται $a_n = a(n)$.

Πρόοδοι

Αριθμητική: $a_{n+1} = a_n + \omega$, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot\omega$

Άθροισμα n όρων α.π.: $S_n = \frac{n\cdot[2a_1+(n-1)\cdot\omega]}{2}$

Γεωμετρική: $a_{n+1} = \lambda a_n$ ή $a_n = \lambda^{n-1}\cdot a_1$

Άθροισμα n όρων γ.π.: $S_n = a_1\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$, $\lambda\ne 1$.

Γεωμετρικός μέσος: Αν a,b,c είναι 3 διαδοχικοί όροι γ.π. τότε $b^2 = a\cdot c$.

Σημαντικά όρια

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$	$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,\ \|x\|<1$
$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = 1,\ x>0$
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$	$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Όπου x σταθερός αριθμός.

Φραγμένες ακολουθίες

- *άνω φραγμένη*: $a_n\le M,\ n\in\mathbf{N},\ M\in\mathbf{R}$.
- *κάτω φραγμένη*: $m\le a_n,\ n\in\mathbf{N},\ m\in\mathbf{R}$.
- *Φραγμένη*: συγχρόνως άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν $m\le a_n\le M,\ n\in\mathbf{N}$, για κάποιο $m,M\in\mathbf{R}$.

✓ Μια ακολουθία απολύτως φραγμένη είναι και φραγμένη.

✓ Μία φραγμένη ακολουθία δε συγκλίνει κατ' ανάγκη.

Μονότονες ακολουθίες

Μία ακολουθία a_n, $\forall n\in\mathbf{N}$ ονομάζεται

- **αύξουσα** αν ισχύει $a_n\le a_{n+1}$, $\forall n\in\mathbf{N}$.
- **φθίνουσα** αν ισχύει $a_n\ge a_{n+1}$, $\forall n\in\mathbf{N}$.
- **μονότονη** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες-Σύγκλιση

✓ Μία μονότονη ακολουθία δε συγκλίνει κατ' ανάγκη.

✓ Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία a_n είναι συγκλίνουσα στο $\mathbf{R}$.

✓ Κάθε συγκλίνουσα σε πραγματικό αριθμό ακολουθία είναι φραγμένη.

✓ Αν $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ και $|a_n|\le|\beta_n|,\ \forall n\in\mathbf{N}$ τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

* * * * * * * * * * * * *

Ειδικές Κατηγορίες Σειρών

α) Γεωμετρικές Σειρές: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$.

- αν $|r|<1$: συγκλίνει. Άθροισμα: $\frac{1}{1-r}$,
- αν $r\ge 1$: απειρίζεται θετικά
- αν $r\le -1$: κυμαίνεται, το όριό της δεν υπάρχει.

β) p-Σειρές: $\varsigma(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,

- αν $p>1$: συγκλίνει • αν $p\le 1$: αποκλίνει

γ) Τηλεσκοπικές : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n = b_n - b_{n+1}$

Συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Άθροισμα: $b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$

δ) Εναλλάσσουσες Σειρές: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n>0$ ή $a_n<0$ για όλα τα $n=0,1,2,...$

ε) Σειρές Taylor: Αν η συνάρτηση f και οι πρώτες τις παράγωγοι $f^{(1)}, f^{(2)},..., f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και αν η $f^{(n)}$ είναι διαφορίσιμη στο (a,b), τότε για $\xi\in(a,x)$ ισχύει

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

όπου $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ είναι το υπόλοιπο της πολυωνυμικής προσέγγισης n-βαθμού. Όταν $a=0$, τότε το ανάπτυγμα ονομάζεται ανάπτυγμα Maclaurin.

Συνήθη αναπτύγματα Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$arc\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

ε) Σειρές Fourier:

Έστω μία $f:[-L,L]\to\mathbf{R}$, περιοδική με περίοδο $T=2L$, τότε η σειρά Fourier είναι:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L})$$

όπου $a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$,

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$, $n=1,2,\ldots$

Εάν $f(x)$ άρτια τότε $b_n=0$, ενώ εάν $f(x)$ περιττή τότε $a_0, a_n = 0$.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

I. Αν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δε συγκλίνει.

II. **α)** Αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν, τότε για κάθε $k,\lambda\in\mathbf{R}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(ka_n+\lambda b_n) = k\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

β) Αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ δε συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ δε συγκλίνει.

III. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

IV. (Απλό κριτήριο σύγκρισης) Έστω $0\le a_n\le b_n$.

- αν $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δε συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ δε συγκλίνει.

V. (Γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης) Έστω $0\le a_n$, $0<b_n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c>0$. Τότε οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ είτε συγκλίνουν είτε αποκλίνουν ταυτόχρονα.

VI. (Κριτήριο λόγου - d' Alembert) Έστω $a_n\neq 0$ για $n\ge n_0$ και $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lambda$. Τότε:

- αν $\lambda<1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\lambda>1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δε συγκλίνει
- αν $\lambda=1$, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

VII. (Κριτήριο Ρίζας - Cauchy). Έστω $a_n>0$ και $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$

- αν $\lambda<1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\lambda>1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δε συγκλίνει
- αν $\lambda=1$, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

VIII. (Κριτήριο Leibnitz.). Έστω $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Αν η ακολουθία (a_n) είναι θετική, φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η σειρά συγκλίνει.

IX. Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι θετική και φθίνουσα, τότε το $I=\int_1^{+\infty} f(x)dx$ και η σειρά $S=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγχρόνως συγκλίνουν ή αποκλίνουν. Στην περίπτωση σύγκλισης ισχύει $I<S<I+f(1)$.

* * * * * * * * * * * *

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κλασικός ορισμός πιθανότητας:

Αν ένα πείραμα έχει **ν** ισοδύναμα δυνατά αποτελέσματα, η πιθανότητα ενός ενδεχόμενου Α είναι ο λόγος *ν(Α)/ν*, όπου *ν(Α)* είναι ο αριθμός των ευνοϊκών αποτελεσμάτων του πειράματος για το Α.

Στατιστικός ορισμός πιθανότητας:

Η πιθανότητα ενός ενδεχόμενου Α κάποιου πειράματος είναι ο αριθμός *P(A)* στον οποίο σταθεροποιείται η σχετική συχνότητα *n(A)/n* του Α σε ένα μεγάλο αριθμό *n* επαναλήψεων του πειράματος με παρόμοιες συνθήκες.

Συνδυασμοί : $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

Διατάξεις : $P_{n,r} = \frac{n!}{(n\text{-}r)!}$

Διατάξεις με επανάθεση: $R_{\nu,r} = \nu^r$

Μεταθέσεις ν αντικειμένων : $P_{\nu,\nu} = \nu!$

Χρήσιμοι τύποι: $(A\bigcup B)^c = A^c\bigcap B^c$, $(A^c)^c = A$

$(A\bigcap B)^c = A^c\bigcup B^c$

✓ <u>Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα:</u> $A\cap B=\varnothing$

✓ $P(A^c) = 1\text{-}P(A)$

✓ $P(A\bigcup B) = P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$

✓ $P(A\bigcup B) = P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$

✓ <u>Δεσμευμένη Πιθανότητα</u> $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

✓ <u>Ανεξάρτητα ενδεχόμενα:</u> $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

✓ <u>Ολική Πιθανότητα</u>: αν $A_i\cap A_j=\varnothing$

$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+\cdots+P(A_n)P(B/A_n)$

✓ <u>Τύπος Bayes:</u>

$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(A_1)P(B/A_1)+\cdots+P(A_n)P(B/A_n)}$ όπου

$A_i\cap A_j=\varnothing$ και $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\Omega$

Μέση τιμή διακριτής: $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$

Μέση συνεχούς διακριτής: $\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$

Διασπορά:

$var(X)=E\left[\left(X-\mathrm{E(X)}\right)^2\right]=\mathrm{E(X^2)}-\mathrm{E(X^2)}$,

Τυπική απόκλιση: $\sigma_X=\sqrt{\mathrm{var}(X)}$

Διωνυμική κατανομή: $B(n,p)$:

$f(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,\ldots,n$

$E(X)=np,\quad Var(X)=np(1-p)$

Poisson $P(\lambda)$ **:** $f(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,\ldots$

$E(X)=\lambda$, $\quad Var(X)=\lambda$

Αρνητική διωνυμική: $f(k)=\binom{k-1}{\nu-1}p^{\nu}(1-p)^{k-\nu}$,

$k=\nu,\nu+1,\ldots$

$E(X)=\nu/p$, $\quad Var(X)=\nu(1-p)/p^2$

Γεωμετρική κατανομή $G(p)$ είναι η αρνητική διωνυμική για $\nu=1$.

Υπεργεωμετρική: $f(k)=\frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$k=0,\ldots,n$, $\quad N_1+N_2=N$

$E(X)=\frac{n\cdot N_1}{N}$, $\quad Var(X)=\frac{n\cdot N_1\cdot N_2\cdot(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}$

Ομοιόμορφη: $U(a,b)$

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

$E(X)=(a+b)/2$, $\quad Var(X)=(b-a)^2/12$

Κανονική

$N(\mu,\sigma^2)$: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $\quad -\infty<x<\infty$:

$E(X)=\mu$, $Var(X)=\sigma^2$

Εκθετική $f(x)=\begin{cases}a\,e^{-ax}, & x\ge 0\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

$E(X)=1/a$, $\quad Var(X)=1/a^2$

όπου $E(X)$ η **μέση** τιμή και $Var(X)$ η διασπορά της τ.μ. *X*.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν $X_1, X_2,\ldots, X_n$ ανεξάρτητες με $E(X_i)=\mu$. $Var(X_i)=\sigma^2$, τότε $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim \mathrm{N}(0,1)$

ή $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$, $n\ge 30$.

* * * * * * * * * * * * *

<u>**Χρήσιμες ταυτότητες και σχέσεις:**</u>

$(a+b)^n = a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\ldots+b^n$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3a^2b\pm b^3$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}),\quad n=1,2,3,\ldots$

$(1+a)^n\ge 1+na,\quad a>0,\quad n=1,2,3,\ldots$

* * * * * * * * * * * * *

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι, $x\in\mathbf{R}$

$\sin(x)=-\sin(-x),\qquad \cos(x)=\cos(-x)$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\sin y\cos x$

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$

$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\cdot\tan y}$

$\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, $\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$\sin x\pm\sin y=2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$

$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\sin(0)=\cos(\pi/2)=0,\quad \cos(0)=\sin(\pi/2)=1$

$\sin(\pi/6)=\cos(\pi/3)=1/2$,

$\sin(\pi/3)=\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$

$\sin(\pi/4)=\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2$

* * * * * * * * * * * * *

Σύνολο μιγαδικών $\mathbf{C}=\{z=x+i\,y|\ x,y\in\mathbf{R}\}$

✓ <u>*Συζυγής:*</u> $\bar{z}=x-iy$

✓ <u>*Αντίστροφος:*</u> $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$

✓ <u>*Μέτρο μιγαδικού αριθμού:*</u>

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ και $r^2=|z|^2=z\cdot\bar{z}$

✓ <u>*Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού*</u>

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, όπου θ *πρωτεύον όρισμα.*

✓ <u>*Θεώρημα De Moivre*</u>

$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$, n ακέραιος ✓

Οι n διακεκριμένες **ρίζες** της εξίσωσης $x^n=z$, $n\in\mathbf{N}$, (που λέγονται και n -οστές ρίζες του z), δίνονται από τον τύπο

$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,\ldots n-1$

Σχέση καρτεσιανών και πολικών συνταγμένων:

$$x = r \cdot \cos(\theta) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r \cdot \sin(\theta) \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$